

Quid novi in meccanica statistica? ($t < 2016-40$)

La meccanica statistica antica ($t < 1976$)

Carnot (1796-1832) Nascita della termodinamica (1824)

<https://webusers.imjprg.fr/~david.aubin/cours/Textes/Carnot-Reflexions1824.pdf>

Clausius (1822-88) Concetto di entropia (1855)

http://www.deutschestextarchiv.de/book/view/clausius_waermetheorie_1856?p=19

Maxwell (1831-79) Teoria cinetica dei gas (1860)

Distribuzione di Maxwell, Diavoletto di Maxwell

$$P(v) = A \exp(-\beta m v^2 / 2) v^{D-1} dv$$

$$\beta = 1 / (k_B T)$$



Boltzmann (1844-1906) : Teorema H (1872)

$$H = -\int d^3v f(\mathbf{v},t) \ln f(\mathbf{v},t) \quad \text{non decresce}$$

<http://plato.stanford.edu/entries/statphys-Boltzmann/>

Gibbs (1900) $P_i = (1/Z) \exp(-\beta E_i)$ all'equilibrio
 $\beta = 1/(k_B T)$

Einstein (1905) $D = \mu k_B T$
(fluttuazioni)

Teoria della risposta lineare (1930-60)

Kramers, Kronig, Callen, Welton, Kubo...

Relazione fra suscettibilità e fluttuazioni all'equilibrio

Regola d'oro (Dirac, Wenzel 1927, Fermi 1950)

Calcolo delle probabilità di transizione partendo dell'hamiltoniana

Fenomeni critici

Suscettibilità magnetica di un ferromagnetico:

Legge di Curie-Weiss $\chi = \text{Const} / (T - T_c)$ (t < 1965)

In realtà: $\chi = \text{Const} / (T - T_c)^\gamma$ $\gamma = 1, 3, \dots$

Funzione di correlazione della magnetizzazione M . ($T = T_c$)

$$\langle |M(\mathbf{k})|^2 \rangle = \text{Const} / k^{2-\eta} \quad \langle M(0)M(\mathbf{r}) \rangle = \text{Const} / r^{D-2+\eta}$$

Gruppo di renormalizzazione (Wilson 1970)

Eliminazione delle componenti di Fourier $k > q$

Poi $q \rightarrow 0$

Nota: Il comportamento normale ($T \neq T_c$) di una correlazione è esponenziale $\langle M(0)M(\mathbf{r}, t) \rangle \propto \exp(-r/\xi) \exp(-t/\tau)$

Parte I. Ambizioni nuove

Grandi deviazioni in piccoli sistemi

(C.R. Physique, giugno-agosto 2007 e lezioni di B. Derrida al collège de France)

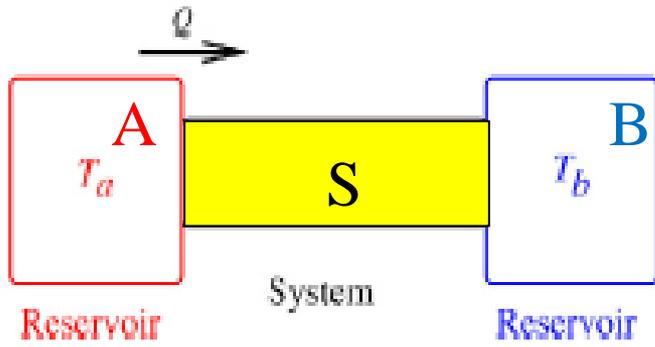
Esempio. Circuito elettrico sottomesso ad un campo elettrico $E > 0$. La corrente $j(t)$ ha una media proporzionale a E , ma ha fluttuazioni che forse si possono osservare in un tempo corto. Definiamo

$$Q(t) = \int_0^t dt' j(t')$$

Definiamo la probabilità $\text{Pro}[Q(t) = jt]$ che $Q(t) = jt$. Si può dimostrare che

$\text{Pro}[Q(t) = -jt] / \text{Pro}[Q(t) = jt] = \exp(-\alpha E jt)$ per tempi lunghi

Proprietà simile par la corrente di calore



Se avessimo

un singolo bagno termico a temperatura T :

$$P(1 \rightarrow 2)e^{-\beta E_1} = P(2 \rightarrow 1)e^{-\beta E_2}$$

oppure $P^- = P^+ e^{-\beta q}$ con $q = E_2 - E_1$

Generalizzazione a 2 bagni : $P^- = P^+ \exp[(\beta_a q_a - \beta_b q_b)]$

P^+ = probabilità di trasferimento del calore q_a da A a S e q_b da S a B

$$\beta_a = 1/k_B T_a \quad \beta_b = 1/k_B T_b$$

Per un processo complesso: $P^- = P_1^- P_2^- P_3^- \dots$

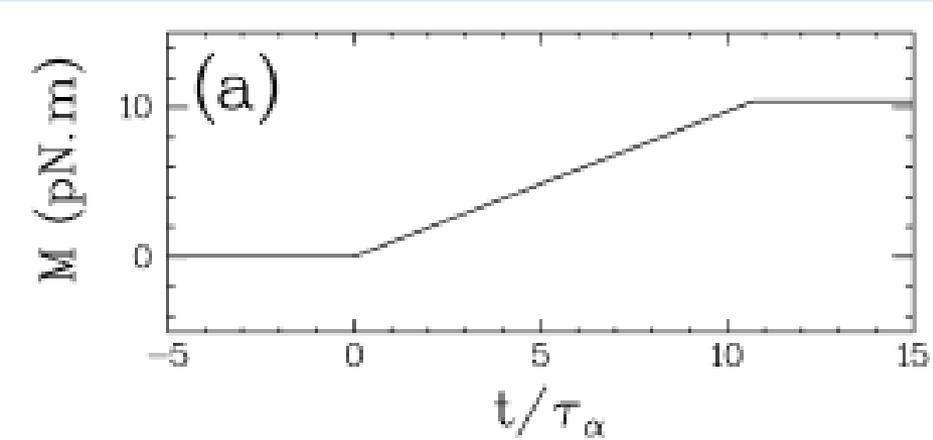
$$P^- = P^+ \exp[(\beta_a Q_a - \beta_b Q_b)] \approx P^+ \exp[-(\beta_b - \beta_a) Q]$$

P^+ = probabilità di trasferimento del calore Q da A a B

Altro esempio di grandi fluttuazioni e osservazione sperimentale (S. Ciliberto)

Pendolo di torsione

$$I d^2 \theta / dt^2 + \nu d\theta / dt + C\theta = M(t) + \eta(t)$$



Definizione:

$$W(\tau) = \int_0^\tau M(t) d\theta(t)$$

e probabilità $\text{Pro}(W)$

Teorema: $\text{Pro}(-W)/\text{Pro}(W) = \exp(-\beta W)$

$$C = 0,00045 \text{ J/rad}$$

$$I = 0,1 \text{ g cm}^2$$

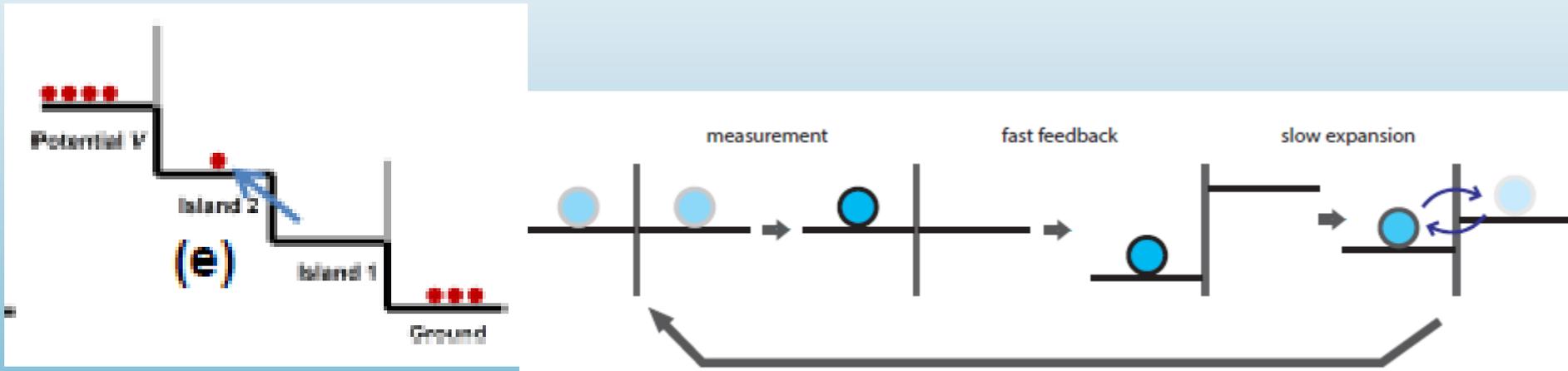
$$\tau \approx 0,01 \text{ s}$$

$$M \approx 10^{-12} \text{ Joules}$$

Maxwell's Demons Realized in Electronic Circuits

J. V. Koski, J. P. Pekola, C.R. Physique (dicembre 2016)

“a single-electron box can be operated by measuring the charge with a single-electron charge detector, namely a single-electron transistor and performing feedback by modulating V_g ”



L. Szilard, *Z. Phys.* 53, 840 (1929).

Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen

<http://www.sns.ias.edu/~tlusty/courses/InfoInBio/Papers/Szilard1929German.pdf>

R. Landauer, *Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process*, *IBM J. Res. Develop.* 5, 183 (1961).

<http://worrydream.com/refs/Landauer%20-%20Irreversibility%20and%20Heat%20Generation%20in%20the%20Computing%20Process.pdf>

Ricreazione :Meccanica della sabbia

Segregazione dei materiali granulari asciutti. Particelle in un contenitore posto in agitazione segregano in modo che le particelle più grosse si concentrano verso l'alto

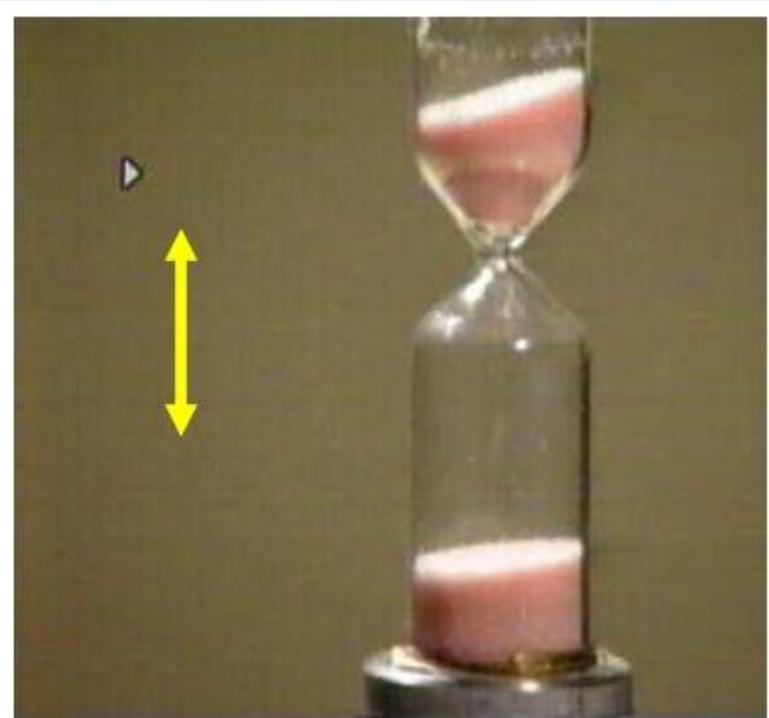


Meccanica della sabbia 2

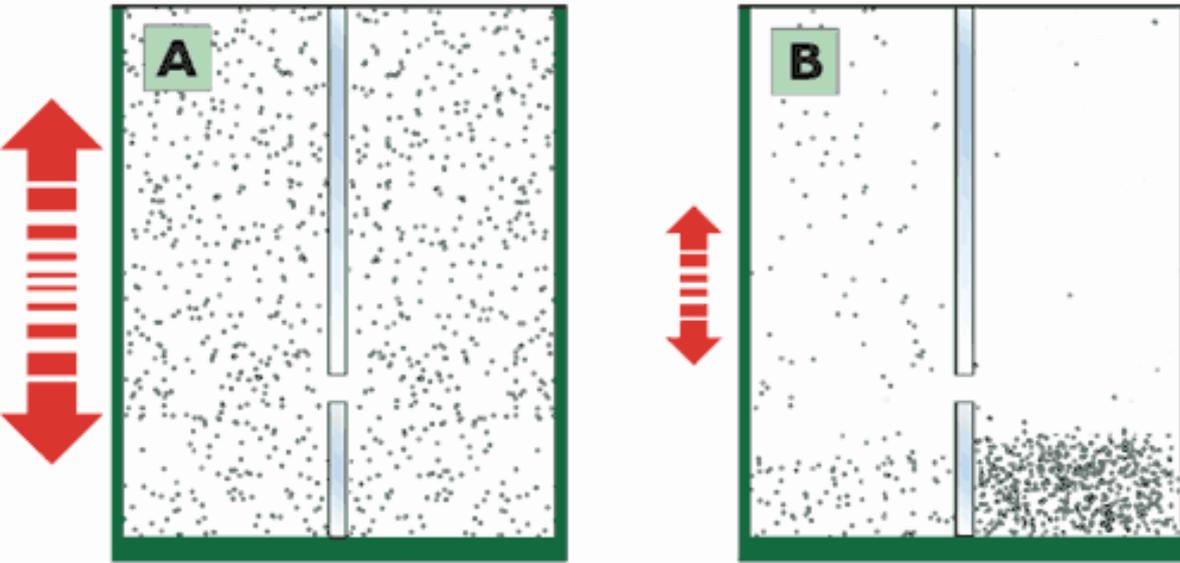


Clessidra scossa

- P. Evesque & W. Meftah *C.R. Acad. Sci.* **314**,
série II, 1125 (1992)



Diavoletto di Maxwell

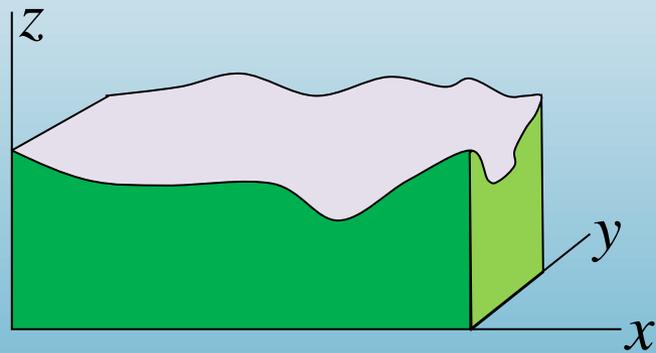
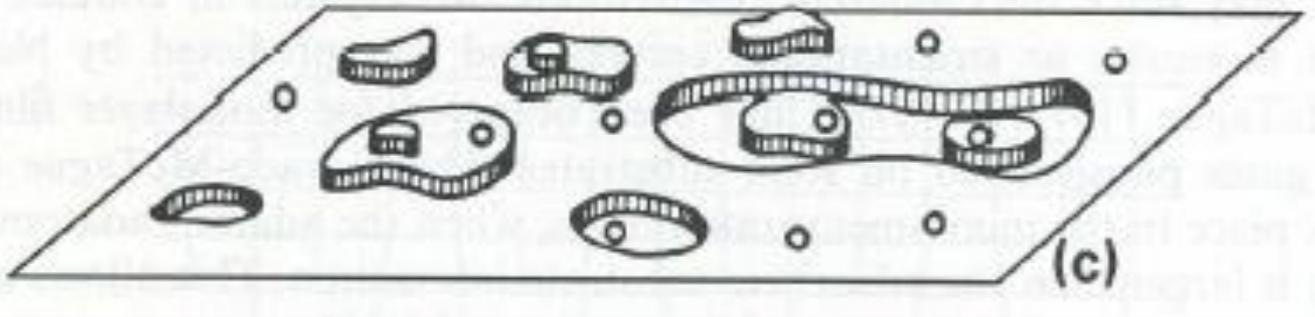


- Jens Eggers, Phys. Rev. Letters, **83**, 5322 (1999)

100 sfere di plastica,
Raggio 1 mm
Amplitudine 3 mm
Frequenza 50 Hz (a sinistra)
30 Hz (a destra)

Parte II: Vie nuove

Meccanica statistica delle superfici



Fluttuazioni termiche dell'altezza $z(x, y) = z(\mathbf{r})$

$$\delta F = \delta(\gamma \mathcal{A}) = \gamma \iint dx dy \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

$$= \gamma \sum_q \left(q_x^2 + q_y^2 \right) |z_q|^2 = \gamma \sum_q q^2 |z_q|^2$$

$$\left\langle |z_q|^2 \right\rangle = \frac{k_B T}{\gamma q^2}$$

$$G(r) = \left\langle [z(\mathbf{r}') - z(\mathbf{r} + \mathbf{r}')]^2 \right\rangle = \int d^{D-1} q \left\langle z_q^* z_q \right\rangle (1 - \cos \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$$

Per $D=3$, $G(r) \approx (kT/\gamma) \ln r$

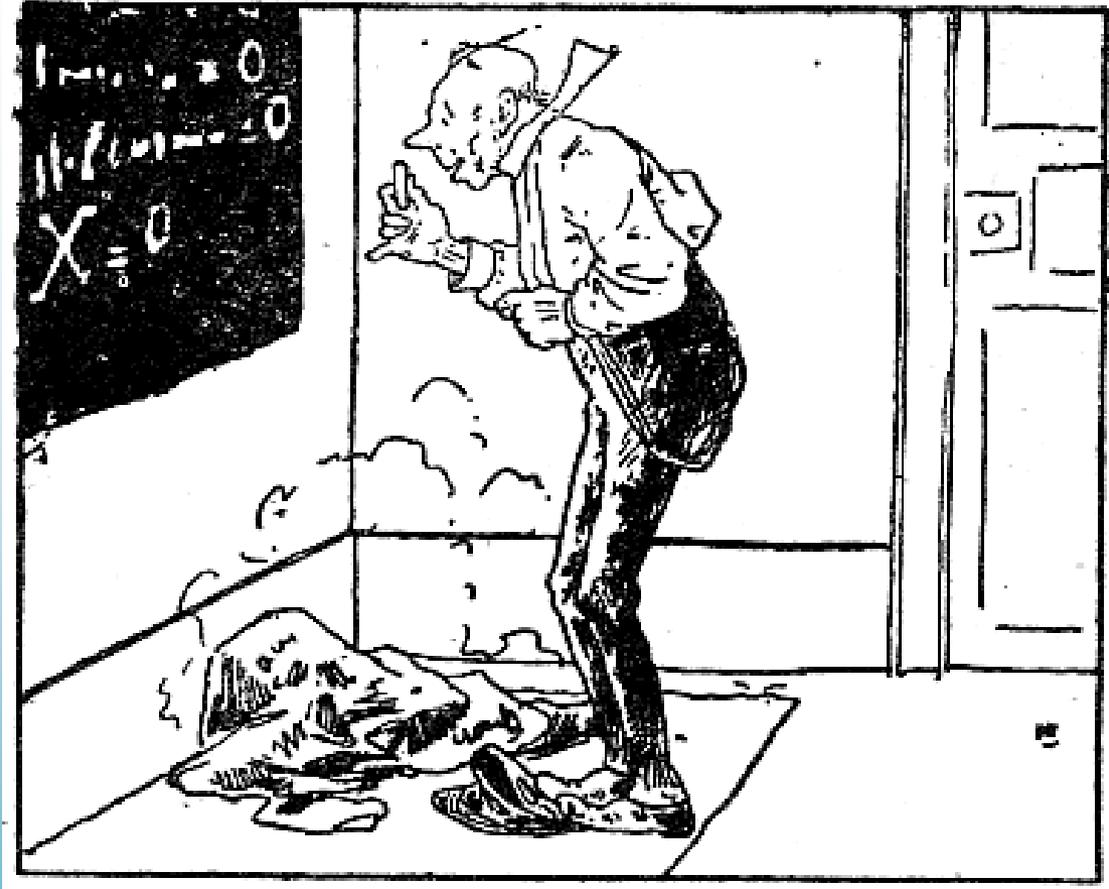
Ma abbiamo dimenticato la gravità g !

$$\left\langle |z_q|^2 \right\rangle = \frac{k_B T}{g\rho + \gamma q^2}$$

Lunghezza capillare $\ell = (\gamma/g\rho)^{1/2}$

$$\ell \approx 5 \text{ mm} \dots \dots G(\ell) \approx 5 \text{ nm}^2$$

Le savant Cosinus.....



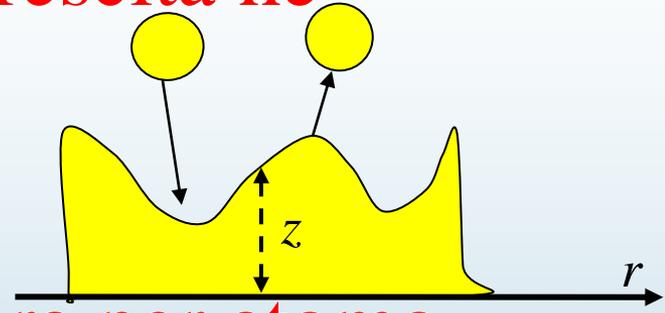
...découvre la valeur de x ... Nous prions les esprits superficielsde ne point prétendre qu'il a beaucoup travaillé pour peu de chose.

Dinamica di lisciamiento di un solido

La superficie diventa piana senza crescita né evaporazione globale

$$\partial z(x, y, t) / \partial t = \delta\mu(x, y, t)$$

μ = potenziale chimico = energia libera per atomo



$\delta\mu$ = potenziale ch. locale - potenziale ch. all'equilibrio

$$\delta F = \gamma \iint dx dy \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

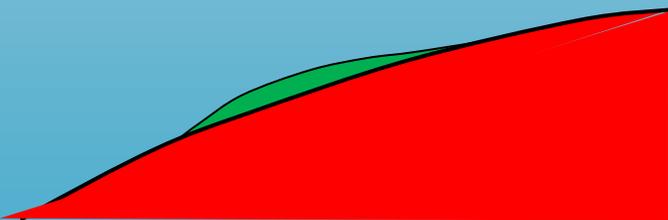
$$\delta\mu = \gamma \nabla^2 z = \gamma \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial z(x, y, t)}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

$$z_q(t) = z_q(0) \exp(-\gamma q^2 t)$$

Ricordiamo le onde di superficie su un liquido:

$$\omega_q^2 = \left(gq + \gamma q^3 / \rho \right) \tanh(qh)$$



Superfici di cristalli

Validità dell'approssimazione continua?

L'approssimazione continua è corretta se $G(r) = \langle \{z(0) - z(r)\}^2 \rangle$
è molto maggiore del quadrato della distanza atomica....

....cioè a temperatura alta e per distanze lunghe.

A bassa temperatura $G(\infty)$ è finito

Transizione rugosa!

energia libera di un gradino:

$$F = L(w - k_B T \ln 2)$$

$$k_B T_R = w / \ln 2$$



Crescita

$$\partial z(x, y, t) / \partial t = \delta\mu(x, y, t) + \phi(x, y, t)$$

Crescita di un cristallo da un liquido:

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, y, t, \dots \text{diffusione nel liquido})$$

È più semplice la crescita per fasci atomici (M.B.E.)

$$\phi(x, y, t) = \phi_0 + f(x, y, t)$$



Funzione aleatoria di valore medio=0

$$\langle f(x, y, t) f(x', y', t') \rangle = \alpha \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(t-t')$$

Fisica statistica nuova!

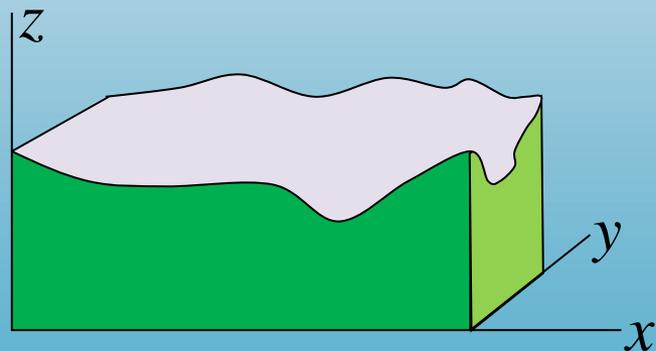
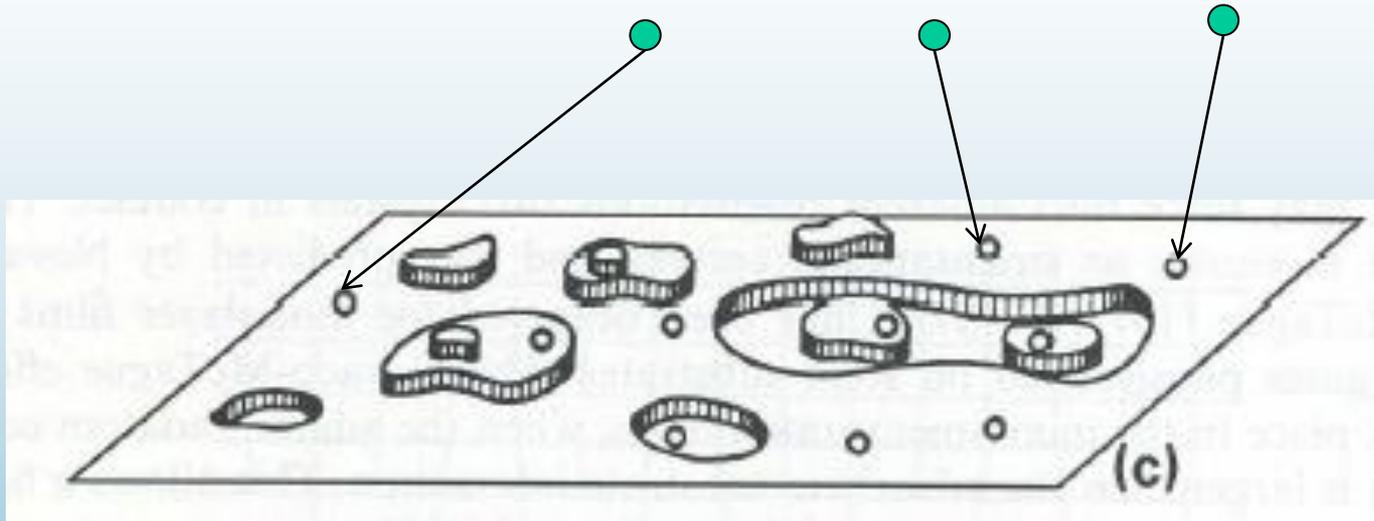
$$z(x, y, t) = \phi_0 t + \zeta(x, y, t) \quad \zeta \rightarrow z$$

$$z(x, y, 0) = 0$$

$$z(x, y, t) = ?$$

Riassunto

Crescita dei cristalli per epitassia per fasci molecolari



Approssimazione con un modello continuo
Dovrebbe essere corretta a grandi scale di
lunghezza se la fluttuazione di altezza è
molto maggiore della distanza atomica

$$z(x,y,0)=0$$

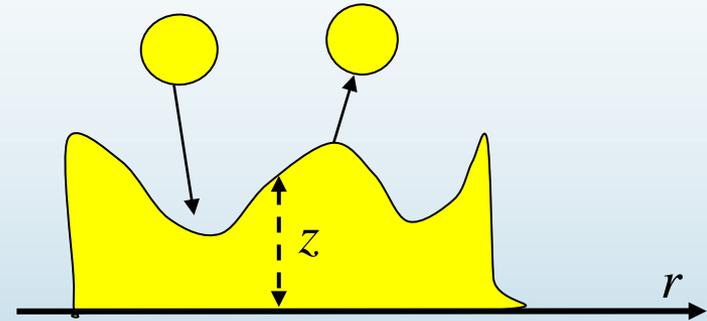
$$z(x,y,t)= ?$$

Modello lineare

$$\frac{\partial z(x, y, t)}{\partial t} = f(\mathbf{r}, t) + \nu \nabla^2 z$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

f =funzione aleatoria



$$\dot{z}_q(t) = f_q(t) - q^2 z_q(t)$$

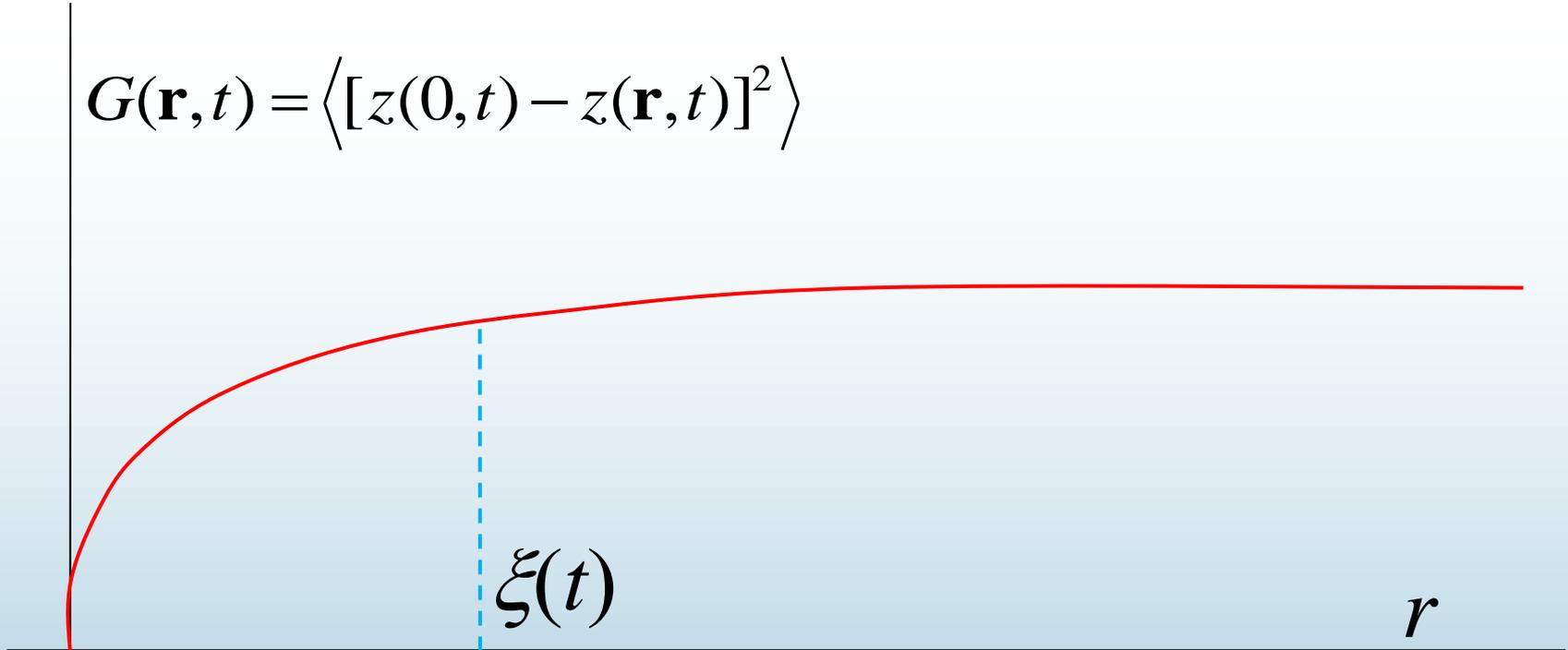
$$z_q(t) = \int_0^t f_q(t') \exp[-\nu q^2 (t - t')] dt'$$

$$\langle f_q^*(t) f_{q'}(t) \rangle = \alpha \delta_{qq'} \delta(t - t')$$

Per una superficie a $(D-1)$ dimensioni in uno spazio D -dimensionale:

$$\langle [z(\mathbf{r}', t) - z(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t)]^2 \rangle = \int d^{D-1} q \langle z_q^*(t) z_q(t) \rangle (1 - \cos q \cdot \mathbf{r})$$

$$G(\mathbf{r}, t) = \langle [z(0, t) - z(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle$$



$$\xi \propto t^{1/\tilde{z}}$$

$$G(\mathbf{r}, t) \propto r^{2\alpha} \quad (r < \xi)$$

$$G(\infty, t) \propto t^{2\beta}$$

Nel modello lineare

$$\dot{z}(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) + \nu \nabla^2 z$$

A $D=3$ dimensioni: $\tilde{z} = 2$ $G(\mathbf{r}, t) \propto \ln r$ $(r < \xi)$

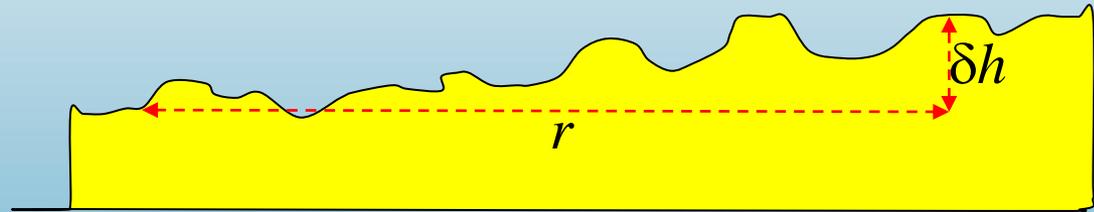
*A $D > 3$ dimensioni la superficie sarebbe piana:
3 è la « dimensione critica superiore »*

Il modello di Kardar, Parisi e Zhang (KPZ)

$$\dot{z}(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) + v\nabla^2 z + \lambda(\nabla z)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} z = f + v\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \lambda\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]$$

modello continuo « generico » di crescita

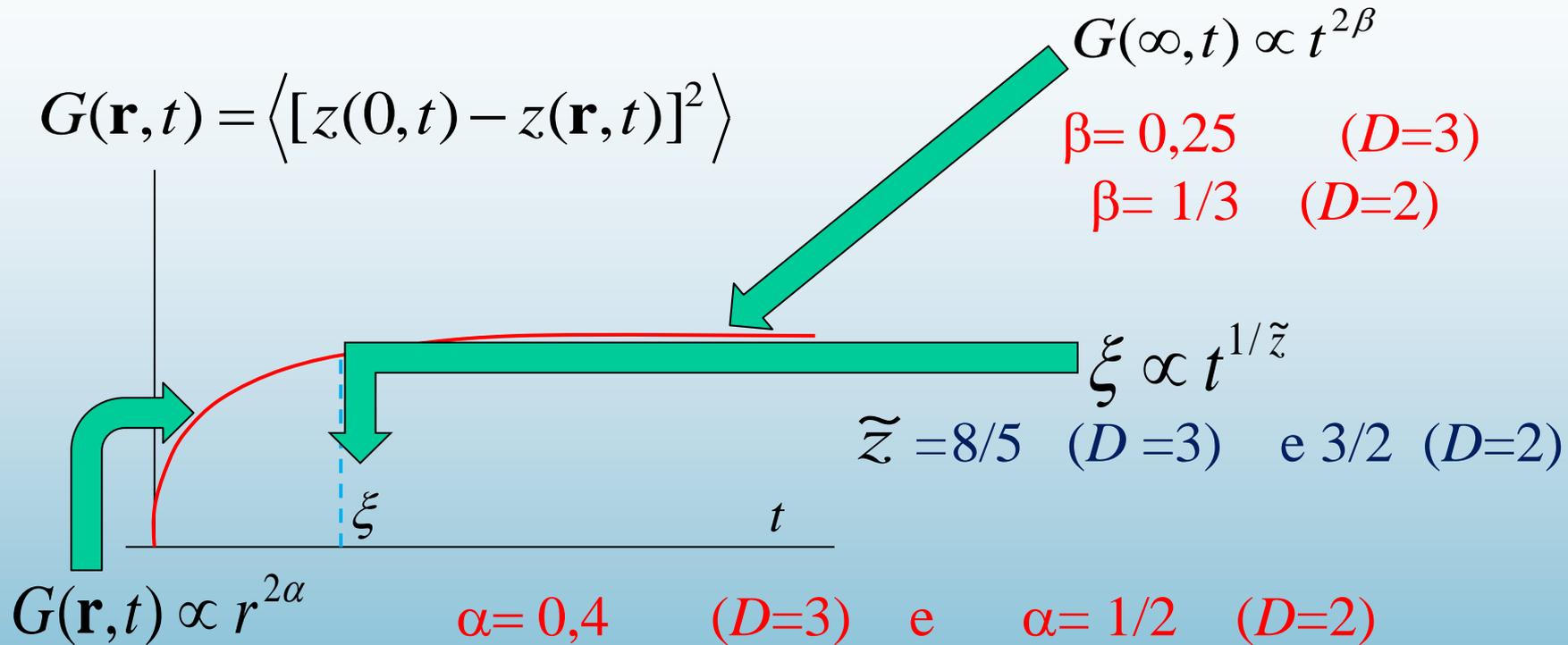


Su una distanza lunga r :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \approx \delta h^2 / r^2 \gg \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{\delta h}{r^2}$$

Il termine nonlineare è rilevante!

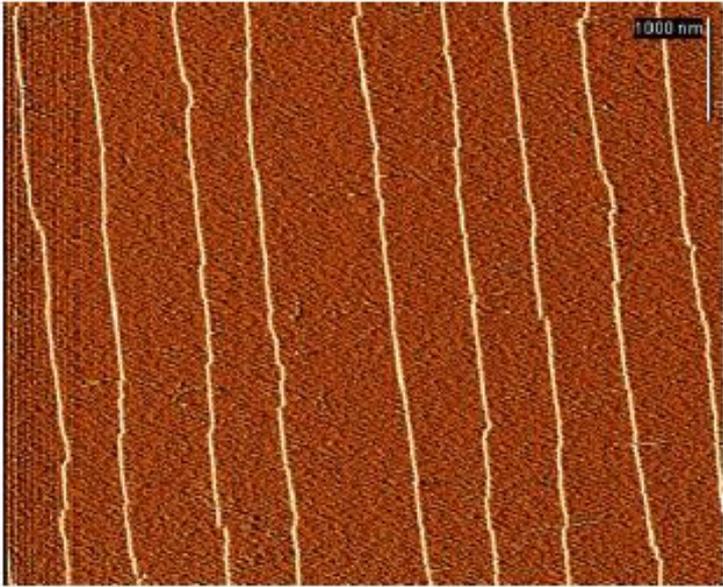
Esponenti del modello KPZ



Soluzione esatta a 1+1 dimensioni: Takeuchi et al.

<http://www.nature.com/articles/srep00034>

Caso particolare : superficie a gradini



Chernov et al. /

Journal of Crystal Growth
275 (2005)

Steps on the (1 0 1) lysozyme face.
Single kinks are about 490 nm apart, or
75 lattice spacing. Marker on the right
top is 1000 nm.

$$\frac{\partial}{\partial t} z = f + v \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + \lambda \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \eta \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]$$

L'ultimo termine è irrilevante: quando eliminiamo le fluttuazioni di lunghezza d'onda corta, λ va a zero

Validità dell' approssimazione continua e al di là di questa approssimazione

L' approssimazione continua è probabilmente corretta se

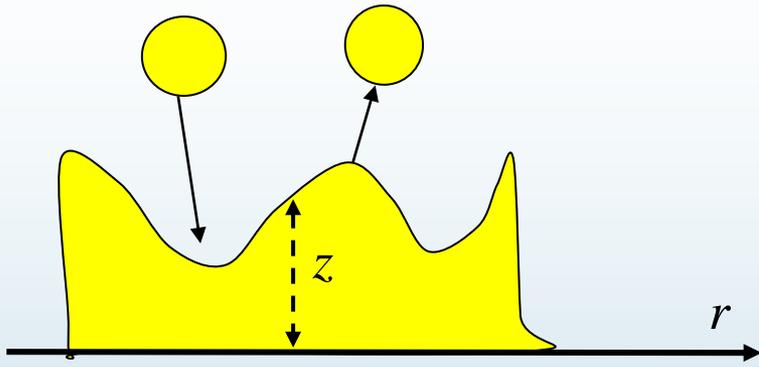
$G(\mathbf{r}, t) = \langle [z(0, t) - z(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle$ è molto maggiore del quadrato della distanza atomica, cioè a tempi lunghi (dopo deposito di molti strati atomici) e per distanze lunghe.

Nelle applicazioni tecnologiche, abbiamo una superficie di Silicio molto piana e facciamo un deposito di pochi strati di un altro semiconduttore (3-5 o 2-6). L' approssimazione continua è quindi poco utile.

Ma altri argomenti di meccanica statistica possono essere sviluppati in questo caso. E anche per descrivere come la superficie raggiunge l' equilibrio se la crescita viene interrotta.

È il fenomeno di « coarsening ».

Crescita dendritica



Non è sempre vero che gli atomi sono attratti dalle buche e si evaporano dalle punte.

Nella crescita da una soluzione supersaturata si ottengono spesso dendriti.



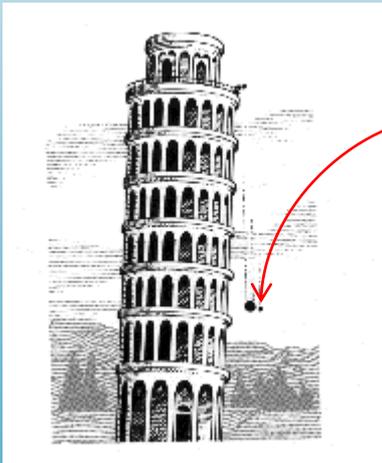
Prospettiva

A. La turbolenza, fallimento della meccanica statistica

La meccanica statistica fuori equilibrio consente il calcolo dei coefficienti di trasporto: conduttività elettrica, termica...

...e viscosità η ($\approx 0,00002$ Pa.s per l'aria)

Formula di Stokes $F = -6\pi\eta R v$



$$F_{\text{grav}} = mg = (4\pi/3)g\rho R^3 \approx 40\,000 R^3$$

se la densità è quella dell'acqua

$$v = gt = (2gh)^{1/2} = 33 \text{ m/s}$$

$$F = -0,001 R$$

Ma la forza turbolente è

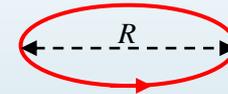
$$F_{\text{turb}} = k\pi R^2 \rho' v^2 \approx 700 R^2$$

Turbolenza e meccanica statistica

(Richardson 1926, Kolmogorov 1941)

Densità di energia corrispondente a vortici di diametro R

$$E(R) \approx \varepsilon^{2/3} R^{5/3}$$



Ma questi lavori non aiutano molto alla risoluzione dei problemi pratici. Questi problemi vengono risolti numericamente.



vortex street behind a circular cylinder in air; the flow is made visible through release of oil vapour in the air near the cylinder

Biologia

Moto browniano alla scala della cella

La turbolenza non c'è perché il numero di Reynolds

$\mathcal{R} = v \rho r / \eta$ è piccolo

Epidemiologia : le dosi deboli

L'epidemiologia studia la relazione fra una **causa** e un **effetto**:

Fumare

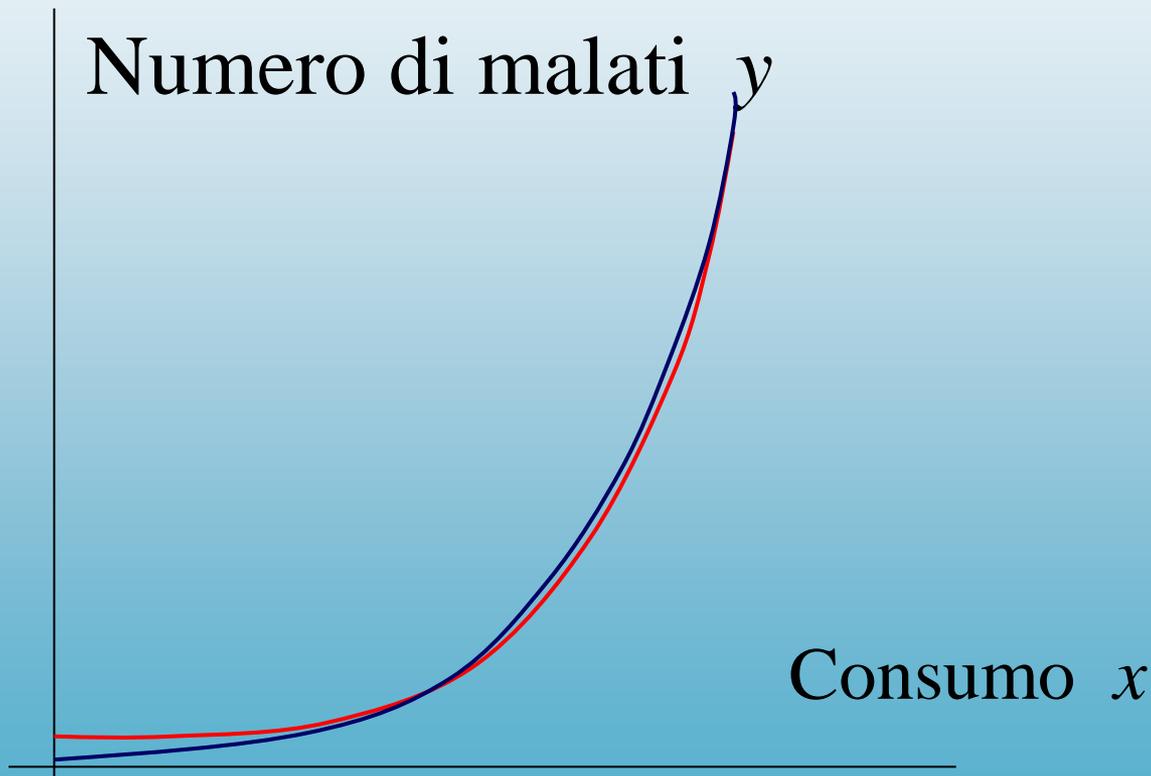
cancro

radiazione

cancro

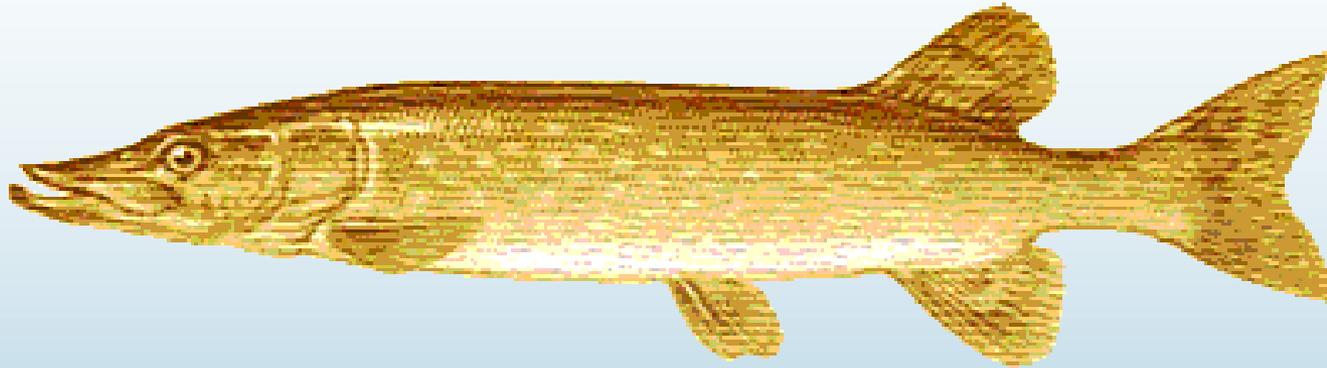
Vino

cardiopatia



Non è possibile decidere se la curva rossa o la curva blu è giusta

Teoria di Lotka e Volterra



Populationsgröße

Piccoli pesci

Grossi pesci

Tempo

