

QUID NOVI IN MECCANICA STATISTICA ?

Jacques Villain, Theory group, Institut Laue Langevin, Grenoble

0. INTRODUZIONE: BREVE STORIA DELLA MECCANICA STATISTICA

1¹. Lo scopo di queste pagine è di evocare alcune novità in meccanica statistica. Una « novità » essendo definita nel caso presente come una scoperta vecchia di meno di 40 anni. Queste novità dunque non sono tanto nuove, e non parlo per gli esperti. Comunque, prima di parlare di novità, e per la chiarezza del mio discorso, voglio schizzare gli eventi più importanti della storia della meccanica statistica. Comincia come termodinamica, cioè nell'anno 1824 con Carnot, che vuole capire e migliorare le recenti scoperte della tecnica, cioè le macchine termiche. Dopo la morte di Carnot, a 38 anni, la termodinamica si sviluppa e Clausius inventa il concetto di entropia. La vera meccanica statistica nasce con Maxwell che scopre la legge di distribuzione delle velocità in un gas: la densità di probabilità che una componente v_x della velocità di una particella di massa m abbia un certo valore è una funzione gaussiana proporzionale a $\exp(-\beta m v_x^2/2)$, dove $\beta=1/k_B T$, T è la temperatura e k_B la costante di Boltzmann. Il nome di Maxwell è anche rimasto famoso per l'invenzione del diavoletto che apre o chiude una porta secondo la natura delle molecole che vogliono passare. Questa favola illustra il carattere statistico del secondo principio, e mette in dubbio la validità del secondo principio della termodinamica. Vedremo che tali demoni adesso possono essere assunti. Ma agiscono in conformità con il secondo principio della termodinamica, che afferma che il diavoletto deve fornire un lavoro per diminuire l'entropia.

2. Maxwell si preoccupò di molte altre cose, e morì a 48 anni. Boltzmann rimase più fedele alla teoria cinetica dei gas, e dimostrò che in un gas si può definire una quantità che non decresce mai e che lui chiamava $-H$, ma che in realtà è l'entropia. Poi Gibbs generalizzò i concetti introdotti da Boltzmann e ottenne un formalismo generale della meccanica statistica di equilibrio, finora ristretta ai gas diluiti. Il seguente compito era di descrivere l'evoluzione di un sistema fuori equilibrio, per esempio sottomesso a forze dipendenti del tempo. Un primo passo era già stato fatto con l'equazione di Boltzmann, ma non era chiaro come si passa dalla meccanica hamiltoniana invariante nel rovescio del tempo alla meccanica statistica che rompe questa invarianza. Questo mistero venne chiarito dalla teoria della risposta lineare. La prima pietra di questo edificio fu l'equazione di Einstein che lega la mobilità al coefficiente di diffusione, cioè, da una parte, la risposta dinamica ad una forza esterna, e dall'altra parte, le fluttuazioni all'equilibrio. Un'altra formula utilissima è la regola d'oro, che permette di passare dall'hamiltoniana alla probabilità di transizione, cioè da una descrizione deterministica ad una descrizione probabilistica.

3. Il grande successo della seconda parte del ventesimo secolo fu la comprensione dei fenomeni critici. Un problema tipico è : « quale è il comportamento della suscettibilità

¹ I numeri in blu (da 1 a 30) rinviano alle diapositive

magnetica di un ferromagnetico vicino alla temperatura di Curie ? » A questa domanda la risposta comune fino a circa 1965 era la legge di Curie-Weiss $\chi = \text{Const} / (T - T_c)$.

Finalmente i fisici si resero conto che i dati sperimentali erano consistenti con

$\chi = \text{Const} / (T - T_c)^\gamma$, con un esponente assai differente di 1. Interessante è anche la funzione di correlazione della magnetizzazione alla temperatura di Curie, che in D dimensioni si scriveva $\langle M(0)M(\mathbf{r}) \rangle = \text{Const} / r^{D-2}$, trasformata di Fourier di $\langle |M(\mathbf{k})|^2 \rangle = \text{Const} / k^2$. Oggi

sappiamo che gli esponenti non sono esatti, in realtà $\langle M(0)M(\mathbf{r}) \rangle = \text{Const} / r^{d-2+\eta}$ e

$\langle |M(\mathbf{k})|^2 \rangle = \text{Const} / k^{2-\eta}$, ma η è piccolo e non si vede facilmente negli esperimenti di

diffusione neutronica. Conviene ricordare che il comportamento normale della funzione di correlazione di una fluttuazione è esponenziale: $\langle \delta M(0)\delta M(\mathbf{r}, t) \rangle \propto \exp(-\kappa r / \xi) \exp(-t / \tau)$, forse moltiplicato per una potenza della distanza. Due parti di un sistema che sono a distanza maggiore di ξ sono quindi praticamente indipendenti, e dopo un tempo τ il sistema perde la memoria del passato. Invece, un decadimento della funzione di correlazione secondo una potenza della distanza implica l'autosimilarità: se viene cambiata la scala, la fisica rimane la stessa. Questo cambio di scala è precisamente la basi del gruppo di renormalizzazione, che è l'attrezzo per capire i fenomeni critici. Più precisamente, si può definire come l'eliminazione delle componenti di Fourier maggiori di un valore q , che si deve prendere sempre più piccolo, ma mai diventa nullo. È uno scopo facile da definire, generalmente difficile da raggiungere. Da qualche decina di anni, le funzioni potenza hanno invaso la fisica. Ne vedremo alcuni esempi nel seguito della lezione.

I. GRANDI FLUTTUAZIONI

4. La meccanica statistica tradizionale si interessa alle fluttuazioni di grandi sistemi per piccole deviazioni dall'equilibrio. La probabilità di queste fluttuazioni è gaussiana, e per un grande sistema questa gaussiana descrive bene la totalità delle fluttuazioni osservabili. Ma osservabili o no, certi risultati teorici sono recentemente ottenuti per la parte non descritta dalla gaussiana, quella che corrisponde a "grandi fluttuazioni" [1,2]. Voglio dire grandi rispetto ai valori medi. L'osservazione di tali fluttuazioni è possibile in piccoli sistemi per tempi corti, cioè usando le possibilità della tecnologia moderna. Un primo esempio è un circuito elettrico sottomesso ad un campo elettrico E che possiamo supporre positivo. La corrente $j(t)$ ha una media proporzionale a E , ma ha fluttuazioni che forse si possono osservare in un tempo corto. Definiamo l'integrale $Q(t)$ della corrente al tempo t , cioè la carica elettrica che passa nel tempo t . Definiamo poi la probabilità $\text{Pro}[Q(t) = jt]$ che $Q(t)$ abbia un certo valore jt . Per un grande sistema e un lungo tempo t , questa probabilità è gaussiana. La forma gaussiana è valida soltanto per piccole deviazioni dal valore medio (dato dalla legge di Ohm) ma se jt è grande, la probabilità di avere una grande deviazione è piccolissima. Non è però vietato di calcolarla, e si può dimostrare (e dimostrerò nel paragrafo seguente) che per tempi lunghi

$$\text{Pro}[Q(t) = -jt] / \text{Pro}[Q(t) = jt] = \exp(-\alpha E jt), \quad (1)$$

dove α è una costante, ovviamente positiva. Se il tempo è breve, e se il campo è debole, la misura è possibile.

5. Adesso giustificherò la formula (1), ma preferisco farlo per la corrente di calore (e non per la corrente elettrica) fra due bagni termici A e B a temperature diverse, $T_a > T_b$. La corrente risulta di transizioni del sistema da uno stato a un altro. Queste transizioni debbono soddisfare il principio del bilancio dettagliato; o piuttosto una generalizzazione di questo principio. Il principio del bilancio dettagliato infatti vale quando c'è un solo bagno termico a temperatura T . In questo caso la probabilità di transizione da uno stato 1 ad uno stato 2 del sistema obedisce alla relazione del bilancio dettagliato $P(1 \rightarrow 2) \exp(-\beta E_1) = P(2 \rightarrow 1) \exp(-\beta E_2)$, che preferisco scrivere $P^- = P^+ \exp(-\beta q)$. La generalizzazione a due bagni termici è $P^- = P^+ \exp[(\beta_a q_a - \beta_b q_b)]$ dove $\beta_a = 1/k_B T_a$ $\beta_b = 1/k_B T_b$ e P^- e P^+ sono le probabilità di due transizioni inverse con trasferimento del calore $\pm q_a$ da A al sistema e del calore $\pm q_b$ dal sistema a B. La relazione del bilancio dettagliato è generalmente scritta per un processo di transizione elementare, ma può anche essere estesa ad una sequenza di transizioni e a la sequenza inversa. Il passo finale è un po più dubbioso. Siccome, in media, il calore preso a sinistra è restituito a destra, scriviamo che le due quantità Q_a e Q_b sono uguali alla stessa quantità Q . Allora

$$P^- = P^+ \exp[(\beta_a - \beta_b)Q]. \quad (2)$$

E siccome posso fare la somma su tutte le sequenze di transizioni corrispondenti al trasferimento del calore Q da A a B, P^+ è adesso la probabilità di trasferimento del calore Q da A a B, e P^- è la probabilità di trasferimento del calore Q da B a A. Secondo la (2), c'è una certa probabilità di violazione del secondo principio, una probabilità piccolissima se Q non è piccolo. La sostituzione di Q_a e Q_b con la stessa quantità Q è ben giustificata per tempi lunghi, cioè grandi valori di Q , ma allora l'esponentiale è troppo piccola per essere misurata. Una discussione più approfondita sarebbe necessaria, ma comunque si può anche fare l'esperimento (se Q non è troppo piccolo), e l'esperimento conferma la formula.

6. Adesso descriverò brevemente un esperimento di Ciliberto *et al.* [1] che riguarda una proprietà simile, ma differente. Si tratta di un pendolo di torsione al quale è applicato una coppia che ora dipende del tempo. In un tempo t la coppia fa un certo lavoro che dovrebbe essere positivo. Se trascuriamo le fluttuazioni, è infatti positivo. Ma ci sono fluttuazioni. Ora definiamo il lavoro W fatto nel tempo τ , e la probabilità $\text{Pro}(W)$ che questo lavoro abbia un certo valore. Si può dimostrare che

$$\text{Pro}(-W)/\text{Pro}(W) = \exp(-\beta W). \quad (3)$$

Questa formula assomiglia alle (1) e (2) poiché è una relazione fra probabilità di due valori opposti. La differenza è che adesso il potenziale dipende del tempo. Ovviamente la misura del rapporto (3) è soltanto possibile se W è piccolo. In realtà, nell'esperimento di Ciliberto *et al.* la costante $C \approx 0,00045$ J/rad e il momento d'inerzia $I \approx 0,1$ g cm² sono piccoli, ma non tanto, e i tempi $\tau \approx 0,01$ s non sono neanche molto piccoli. La quantità davvero nanoscopica è la coppia M , dell'ordine di 10^{-12} J.

7. Questo esperimento dimostra che la tecnologia moderna consente la verifica di certe teorie che 50 anni fa sarebbero rimaste senza rapporto con la realtà. La tecnologia moderna trasforma persino certi esperimenti di pensiero del passato in esperimenti reali. Adesso descrivo il principio di un diavoleto di Maxwell in un circuito elettronico [3]. Il diavoleto di Maxwell originale dava un passaggio ad atomi ; invece il diavoleto elettronico, che gli esperti sono adesso capaci di fare, da un passaggio ad elettroni ; e impedisce il loro passaggio nella direzione opposta. Così il diavoleto forza gli elettroni ad aumentare la loro energia, andando nel senso opposto al campo elettrico. Per dare o impedire il passaggio degli elettroni serve una « griglia » (*gate*) il cui potenziale può essere abbassato o aumentato. Per sapere se il potenziale deve essere abbassato o aumentato, bisogna sapere se l'elettrone è a destra o a sinistra, e questo si fa mediante un detettore di carica. Il diavoleto è molto veloce, ma non abbastanza veloce per occuparsi di più di un elettrone, a quindi ha bisogno di un condensatore, polarizzato da una tensione adeguata, di tal modo che a bassa temperatura il numero di elettroni possa variare soltanto di uno. L'energia $E=(1/2)Q^2/C-VQ$ deve infatti essere vicina al suo minimo. Abbiamo tuttavia bisogno di fluttuazioni termiche per far muovere l'elettrone. In realtà un diavoleto (cioè una griglia) non basterebbe, ci vuole almeno 3 griglie. Questo esperimento fu immaginato da Szilard 93 anni fa. Più recentemente Landauer si è interessato alle variazioni di energia e di entropia legate ad operazioni informatiche. La conclusione è che il secondo principio non è mai violato. Non è una sorpresa.

II- Materia granulare. [4].

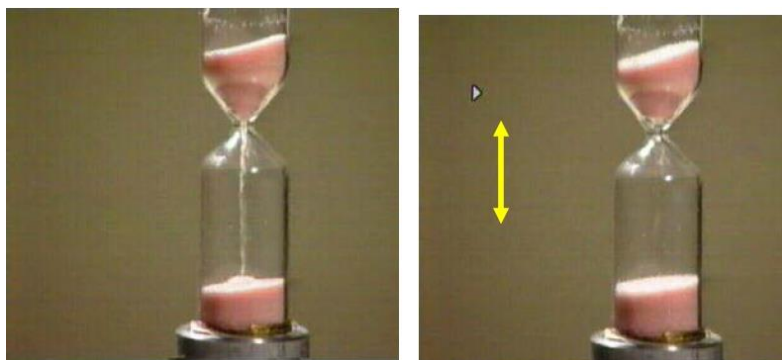
8. Per concludere la prima parte della lezione, voglio dire alcune parole sulle strane proprietà della materia granulare, dunque della sabbia. Lo farò senza scrivere equazioni, sarà una ricreazione. Una prima osservazione è stata fatta dai camionisti che trasportano frutti sulle strade gibbose dell'America del Sud. Secondo le mie informazioni, i frutti grossi mescolati ai piccoli si ritrovano alla superficie all'arrivo. Devo confessare che ho provato a fare l'esperimento, non con un autocarro, ma con una scatola, come consigliato da Duran [4] e che il risultato non è stato convincente.



9. Invece ho fatto questo esperimento, che vedete su questa immagine di bassa qualità, fatta da un vincitore del premio Nobel. P.G. de Gennes ha introdotto una bacchetta spessa in un vaso pieno di materia granulare (può essere sabbia o riso o altro) poi ha un poco scosso il vaso, e adesso può sollevare l'insieme, tirando soltanto la bacchetta. Come l'ho detto, anch'io ho fatto questo esperimento una volta davanti qualche decina di spettatori, e avevo voglia di farlo per voi, ma ovviamente un tale esperimento deve essere preparato. E non ha funzionato! Probabilmente il recipiente era troppo basso.



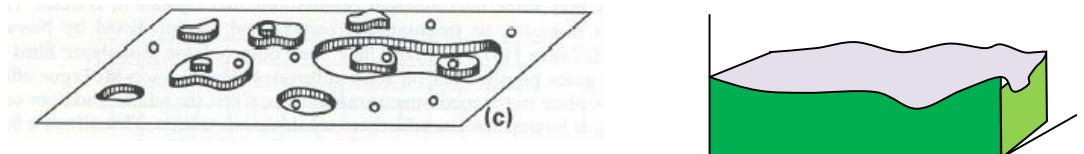
10. Un esperimento forse più facile si fa con una clessidra, come se usava una volta per sorvegliare la cottura delle uova. Se scuotete la clessidra, la sabbia non scende e l'uovo sarà troppo cotto.



11. Un esperimento più difficile (Jens Eggers, Phys. Rev. Letters, **83**, 5322, 1999) simula un diavoleto di Maxwell. Mettiamo la materia granulare in una scatola con due compartimenti che scuotiamo. All'inizio i grani erano ugualmente distribuiti nei due compartimenti. Per certi valori dei parametri del moto, c'è una segregazione in un compartimento.

III- Meccanica statistica delle superfici [5]

12. In questa parte voglio parlare di meccanica statistica delle superfici. Considero una superficie di solido o di liquido. A bassa temperatura e all'equilibrio sarebbe piana. Ma non è perfettamente piana, sia perché ci sono fluttuazioni termiche, sia perché la superficie cresce oppure si evapora. La prima figura rappresenta schematicamente una superficie di cristallo a scala microscopica, la seconda figura rappresenta ancora più schematicamente una superficie a scala più piccola,



e siccome questa figura non mi piace molto, vi mostro una immagine di superficie con fluttuazioni che ovviamente non sono termiche, ma vi invito a supporre che una superficie di solido con fluttuazioni termici è simile a questa.



13. Prima di parlare delle novità, cio che è il compito a me assegnato, devo ricordare certe proprietà classiche delle superfici. Parliamo prima delle fluttuazioni termiche dell'altezza. La formula di Gibbs consente di calcolare il loro valore medio se l'energia libera \mathcal{F} è conosciuta. Suppongo (ma non è indispensabile) che l'energia di superficie γ per unità di area è isotropica. Allora l'energia di superficie è il prodotto di γ per l'area totale. Scriverò piuttosto la deviazione $\delta\mathcal{F}$ dell'energia libera rispetto all'energia libera della superficie piana. Supponendo che l'altezza $z(x,y)$ è una funzione di x e y che ha tutte le sue derivate, è facile vedere che per piccole deviazioni $\delta\mathcal{F}$ è una forma quadratica

$$\delta\mathcal{F} = \gamma \iint dx dy \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (4)$$

che ricorda per esempio l'energia elastica di un solido oppure un'energia libera di Ginzburg-Landau. La forma quadratica si lascia diagonalizzare tramite una trasformazione di Fourier, e siccome la probabilità è data dalla formula di Gibbs, quindi esponenziale, possiamo ridurre il valore medio quadratico della fluttuazione,

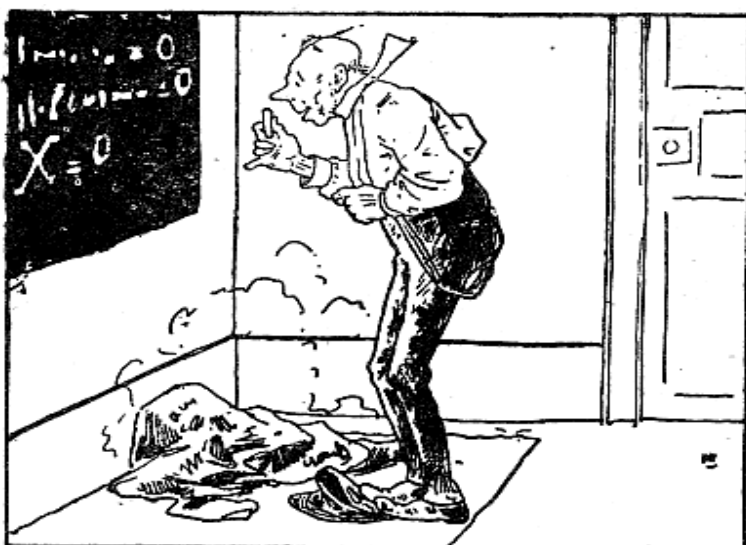
$$\langle |z_q|^2 \rangle = \frac{k_B T}{\gamma q^2} \quad (5)$$

Tornare allo spazio diretto è facile. In 3 dimensioni vediamo che la fluttuazione

$$G(r) = \langle [z(\vec{r}') - z(\vec{r} + \vec{r}')]^2 \rangle = \int d^{D-1} q \langle z_q^* z_q \rangle (1 - \cos \vec{q} \cdot \vec{r}) \quad (6)$$

è infinita a distanza infinita, $G(r) = (k_B T / \gamma) \ln r \dots$ Ma abbiamo dimenticato la gravità! È facile scrivere la formula corretta con gravità. Vediamo che la gravità è trascurabile fino ad una distanza dell'ordine del centimetro. Per distanze maggiori, la fluttuazione di altezza è dell'ordine di alcuni nanometri. Osservabile in un ottimo laboratorio, ma poco interessante per noi. È però importante fare tali calcoli, anche se hanno un risultato quasi negativo.

14. A questo punto possiamo però ricordare il fumetto che racconta le avventure di un scienziato, [6] *le savant Cosinus*, il scienziato Coseno, che lavora parecchie ore per trovare il valore di una certa quantità x , trova finalmente che x è uguale a zero e ne è felicissimo, anche se una mente superficiale potrebbe pensare che un risultato nullo non giustifica di rallegrarsi



15. Abbiamo calcolato le fluttuazioni all'equilibrio. Adesso voglio calcolare la dinamica di lisciamiento. Supponiamo che, a una certa temperatura, per qualche ragione, una superficie sia più rugosa che dovrebbe. Poco a poco, se la temperatura è abbastanza alta, diventa liscia; è il fenomeno di ricottura. Se la pressione parziale è quella di equilibrio, globalmente non cresce, non si evapora, ma localmente le punte evaporano e le buche crescono, perché la superficie è in equilibrio con un vapore alla pressione adeguata. La quantità importante è il potenziale chimico locale, cioè l'energia libera per atomo. All'equilibrio è uguale nel vapore e nella parte condensata (solido o liquido). Se ci sono variazioni locali $\delta\mu$ del potenziale chimico, c'è localmente una crescita o evaporazione. L'equazione corrispondente è $\partial z(x, y, t) / \partial t = \delta\mu(x, y, t)$. Se la superficie è piana, $\delta\mu = 0$ e la superficie non cambia. Per calcolare il potenziale chimico, bisogna usare la formula (4) per l'energia libera \mathcal{F} , e calcolare la variazione di \mathcal{F} quando si aggiunge un po' di materia. Dopo un calcolo di alcune righe si

ottiene (trascurando la gravità) $\delta\mu = \gamma \nabla^2 z = \gamma \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$. Otteniamo per z un'equazione lineare

che si risolve facilmente tramite una trasformata di Fourier. Questa equazione sarà utile per descrivere la crescita, ma la sua osservazione diretta è difficile. Infatti, per un solido la dinamica è molto lenta a temperatura normale, e per un liquido la dinamica non si riduce a un moto superficiale, di tal modo che abbiamo onde di superficie, la cui frequenza dipende della profondità h del liquido:

$$\omega_q^2 = (gq + \gamma q^3 / \rho) \tanh(qh)$$

16. Poiché abbiamo visto che la dinamica delle superfici liquide è troppo complicata, dobbiamo chiederci se la nostra descrizione è valida per cristalli. La difficoltà è l'approssimazione continua. È ragionevole pensare che l'approssimazione continua è corretta se $G(r) = \langle \{z(0) - z(r)\}^2 \rangle$ è molto maggiore del quadrato della distanza atomica... cioè a temperatura alta e per distanze lunghe. A bassa temperatura è facile dimostrare che, in contrasto con la (6), $G(\infty)$ è finito persino se la distanza r è lunga. Abbiamo dunque una transizione, chiamata transizione rugosa. Per precisare questo punto, possiamo calcolare in modo approssimativo l'energia libera di un gradino. Se è positiva, gradini infiniti sono assenti e quindi tutti i punti della superficie sono allo stesso livello tranne alcuni che sono circondati da un gradino finito e sono un po' più alti o un po' più bassi. La superficie è liscia. Invece, se l'energia libera di un gradino è negativa, allora fra due punti a grande distanza ci sono sempre gradini, il numero di gradini diventa sempre più grande quando la distanza cresce, la superficie è rugosa. Ora, l'energia di un gradino di lunghezza L è Lw , dove $w > 0$ perché per fare un gradino dobbiamo rompere legami chimici. Per ottenere l'energia libera F , bisogna sottrarre l'entropia, che si ottiene approssimativamente dicendo che a ogni passo si può andare a destra o a sinistra, quindi $F = L(w - k_B T \ln 2)$ e la temperatura di transizione è $k_B T_R = w / \ln 2$. Tipicamente, è dell'ordine della metà della temperatura di fusione.

17. Ma può darsi che la superficie sia rugosa, non a causa delle fluttuazioni termiche, ma perché cresce. Una superficie che cresce è sempre rugosa dopo il deposito di alcuni strati. Per descrivere la crescita, dobbiamo aggiungere un termine adeguato $\phi(x, y, t)$ all'equazione $\partial z(x, y, t) / \partial t = \delta\mu(x, y, t)$. La forma del termine di crescita $\phi(x, y, t)$ dipende del tipo di crescita. Nella crescita di un solido da un liquido, la funzione $\phi(x, y, t)$ non dipende soltanto dalla superficie, ma deve prendere in conto la diffusione di materia o di calore nel liquido. Preferisco parlare di un caso più semplice, la crescita per fasci atomici (M.B.E.). Allora $\phi(x, y, t)$ è uguale ad una costante più una funzione aleatoria di valore medio nullo, e senza correlazioni. Abbiamo una fisica statistica nuova! Farò la trasformazione di Galileo $z(x, y, t) = f_0 t + \zeta(x, y, t)$ e poi sostituirò ζ con z . Al tempo $t=0$, $z=0$ dappertutto. Poi, z rimane nullo in valore medio e vorremmo avere informazioni sulle sue fluttuazioni.

18. Per riassumere, vogliamo descrivere la crescita dei cristalli per epitassia per fasci molecolari per tempi lunghi, quando molti strati sono depositi nell'approssimazione continua.

19. Secondo le equazioni precedenti, l'equazione della crescita è $\dot{z}(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) + \nu \nabla^2 z$ dove

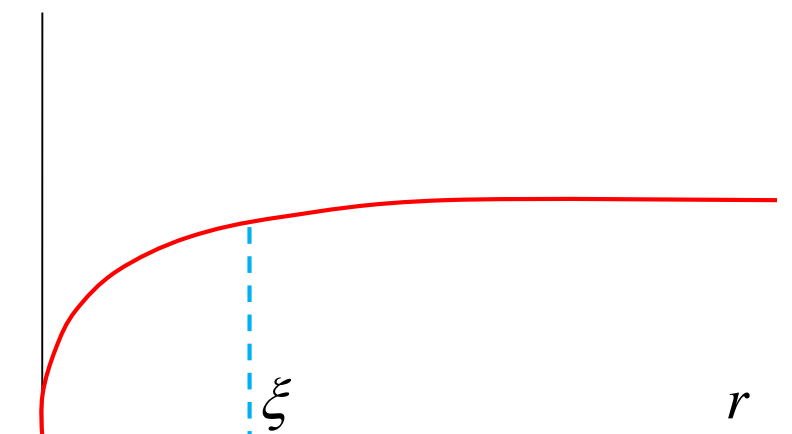
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, f \text{ è una funzione aleatoria di valore medio nullo e } \nu \text{ una costante. Il secondo termine}$$

corrisponde al fatto che l'evaporazione è maggiore su una punta perché l'atomo è legato a un minore numero di vicini mentre in un buco il numero di vicini è maggiore. L'equazione di evoluzione, essendo lineare, si risolve facilmente con una trasformazione di Fourier. Ma siccome la funzione f è aleatoria, l'altezza z è anche una funzione aleatoria. È caratterizzata da funzioni di correlazioni che si possono facilmente dedurre dalle correlazioni di f . Per esempio,

$$\langle [z(\mathbf{r}', t) - z(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t)]^2 \rangle = \int d^{D-1} q \langle z_q^*(t) z_q(t) \rangle (1 - \cos \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$$

Ho introdotto la dimensione D dello spazio, che per le superfici del nostro mondo è 3, e quindi le superfici sono a due dimensioni e il vettore q ha due componenti. Ma è anche possibile fare un'interfaccia unidimensionale in un sistema bidimensionale, per esempio una foglia di carta bagnata in parte da un liquido. Lo studio dei fenomeni critici ha indotto i fisici teorici a considerare anche valori non interi della dimensione D .

20. Il risultato del calcolo è rappresentato dalla curva di G come funzione di r per un tempo finito t . L'altezza ha fluttuazioni, queste fluttuazioni sono finite perché il tempo è finito. Perciò G ha un valore finito per r infinito. In altre parole, la curva ha un asintoto orizzontale, che raggiunge ad una lunghezza ξ che dipende dal tempo; è una potenza del tempo. Anche $G(\infty, t)$ è una potenza del tempo. E a tempi corti, $G(r, t)$ è una potenza di r . Queste leggi di potenza sono il comportamento generico, che si incontra in tutti i modelli... tranne qualche eccezione. In fatti nel modello lineare a tre dimensioni, il calcolo mostra che $G(r, t)$ cresce come $\ln r$.



21. Ma il modello lineare non è giusto! Bisogna aggiungere un termine non lineare. Così si ottiene un modello dovuto a Kardar, Parisi e Zhang (KPZ).

$$\dot{z}(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) + \nu \nabla^2 z + \lambda (\nabla z)^2$$

Questo modello è importante perché è semplice: è locale e continuo. Non dobbiamo considerare per esempio i vari sistemi cristallini. Fra i modelli locali e continui, il modello KPZ è quello che non fa ipotesi restrittive. Per esempio una ipotesi restrittiva potrebbe essere di l'evaporazione è di supporre che il lisciamiento è dovuto alla diffusione sulla superficie. Questa ipotesi potrebbe essere fisicamente giusta, ma Kardar, Parisi e Zhang non la fanno perché sarebbe una restrizione e vogliono un modello senza restrizione. Possiamo vedere che il termine quadratico è più importante del termine lineare. Infatti, se chiamo δh la differenza di altezza fra due punti della superficie la cui distanza orizzontale è r , il valore medio del gradiente a questa scala è $\delta h/r$, mentre la derivata seconda del termine lineare è $\delta h/r^2$. Per grandi distanze r , δh è anche grande e quindi il termine quadratico è più grande del termine lineare. D'altra parte, il termine quadratico è nullo alla pressione di equilibrio (cioè quando il potenziale chimico è uguale nel solido e nel vapore). Per questa ragione i fisici non hanno subito capito che c'è un termine quadratico.

22. La diapositiva seguente mostra gli esponenti corrispondenti al modello KPZ. A due dimensioni c'è una soluzione esatta [7]. A tre dimensioni i risultati sono numerici.

23. Un caso particolare è quello di una superficie a gradini, ed è l'occasione di mostrarvi l'immagine di una tale superficie, cioè una superficie (101) tagliata di traverso. È ottenuta per AFM, microscopia a forza atomica, un metodo straordinario inventato da Binnig nel 1985 che consente l'osservazione di dettagli di dimensione atomica su una superficie. La STM, microscopia a effetto tunnel, scoperta nel 1982, anche da Binnig (con Rohrer), è ancora più precisa ma funziona soltanto con conduttori elettrici. Questi due metodi hanno permesso progressi straordinari nell'osservazione delle superfici. Se vogliamo un modello continuo per descrivere la crescita di una tale superficie (modello corretto soltanto per grandi scale di lunghezza), sarà simile al modello KPZ, con una differenza importante. Ovviamente c'è un'anisotropia, che possiamo fare scomparire nel termine lineare tramite un cambio di variabile, ma soprattutto c'è un segno – nel termine quadratico. Se avessimo i 2 termini quadratici con il segno –, potremmo sostituire z con $-z$ e tornare al caso con un termine quadratico positivo. Ma con due termini quadratici di segno opposto, non funziona. Infatti, se eliminiamo le fluttuazioni di lunghezza d'onda corta, sempre più corta (questo è il gruppo di renormalizzazione) il valore renormalizzato di λ va a zero. I termini quadratici sono adesso irrilevanti.

24. Conviene adesso chiedersi se l'approssimazione continua è accettabile. Una condizione ovviamente necessaria è che la correlazione $G(r,t)$ sia molto maggiore del quadrato della distanza atomica, e questo può soltanto succedere dopo il deposito di molti strati atomici, e per distanze lunghe. Nelle applicazioni tecnologiche, abbiamo una superficie di Silicio molto piana e facciamo un deposito di pochi strati di un altro semiconduttore (3-5 o 2-6). L'approssimazione continua è quindi poco utile. Ma altri argomenti di meccanica statistica possono essere sviluppati in questo caso. E anche per descrivere come la superficie raggiunge l'equilibrio se la crescita viene interrotta. È il fenomeno di « coarsening » [8].

25. Per chiudere questa discussione sulla crescita, e per farne vedere la diversità, torno all'ipotesi che avevo fatta, che la superficie vuole rimanere piana e quindi le sue punte si evaporano mentre gli atomi sono attratti dalle buche. In realtà l'evaporazione è spesso trascurabile e gli atomi possono essere inghiottiti dalle punte prima di arrivare alle buche. Dipende delle circostanze della crescita. Nella crescita per fasci molecolari non succede. Ma nella crescita da una soluzione supersaturata può succedere e questo è la causa della crescita dendritica. I cristalli di neve sono l'esempio più famoso. Crescono a una temperatura bassa che non consente la diffusione delle molecole sulla superficie, non consente neanche l'evaporazione, l'unico moto consentito per le molecole d'acqua è la diffusione nell'aria.

Ho scelto di parlare delle superfici perché sono un progresso essenziale dei 40 ultimi anni. Venticinque secoli fa, Democrito aveva inventato gli atomi. Da qualche decina di anni possiamo vederli e muoverli. I progressi recenti della meccanica statistica non hanno, secondo me, la stessa importanza.

IV-Possibili progressi futuri

Per concludere questa lezione, vorrei suggerire qualche direzione per la fisica statistica, evocare certi punti che mi sembrano importanti, o comunque su quali sono ignorante e mi piacerebbe di esserlo meno.

26. Un primo tema è la turbolenza, che mi sembra essere un fallimento della meccanica statistica. Infatti la meccanica statistica fuori equilibrio consente il calcolo di coefficienti di trasporto, per esempio la conduttività elettrica o termica. Il successo è soddisfacente. Ma la meccanica statistica consente anche il calcolo della viscosità di un fluido. E poi si può chiedere a che serve la viscosità. Serve per esempio a calcolare la forza di attrito su una sfera di raggio R che si muove a velocità v in un fluido di viscosità η . È la formula di Stokes, $F = -6\pi\eta Rv$. Per esempio, certi hanno dubbi sul famoso esperimento che Galileo avrebbe fatto a Pisa. Dicono che la resistenza dell'aria al moto è troppo grande per consentire una velocità indipendente della massa e del volume del corpo che cade. Per sapere se hanno ragione, proviamo prima ad usare la formula di Stokes. Dobbiamo confrontare questa forza di attrito alla forza di gravità F_{grav} . Se la materia della sfera ha una densità dell'ordine di quella dell'acqua, F_{grav} è circa $40\,000 R^3$ (le unità sono quelle del sistema internazionale). Per calcolare la forza di attrito, bisogna calcolare la velocità. La torre di Pisa è alta di 50 metri circa e se la resistenza dell'aria è trascurata si ottiene facilmente una velocità di circa 33 m/s all'arrivo al suolo. Vediamo che la forza di Stokes è trascurabile. Ma si deve prendere in conto la turbolenza, e se lo facciamo troviamo una forza di resistenza al moto $F_{turb} = k\pi R^2 \rho' v^2$, dove ρ' è la densità dell'aria e k è un coefficiente dell'ordine di 1. Questa formula si deduce facilmente di un argomento dimensionale, perché la forza può dipendere soltanto di R , ρ' et v . Vediamo che la forza di Stokes è completamente trascurabile rispetto alla forza dovuta alla turbolenza... che la meccanica statistica non sa calcolare (se non sbaglio). La resistenza turbolenta dell'aria all'arrivo in basso della torre è dello stesso ordine della gravità. Per quanto riguarda Galileo, vedi l'appendice.

27. Il rapporto fra la turbolenza e la meccanica statistica è adesso un oggetto di interesse per molti ricercatori (per esempio David Ruelle) ma fu anche l'oggetto di lavori classici come quelli di Richardson e di Kolmogorov [9]. Questi scienziati hanno descritto la turbolenza omogenea di un fluido nel quale è introdotta l'energia nella forma di un moto fatto di componenti di Fourier di grande lunghezza d'onda. L'effetto è di formare vortici. I vortici sono elementi essenziali della turbolenza. Questi vortici di grande diametro decadono e danno la loro energia per formare vortici più piccoli, etc. e quando i vortici sono abbastanza piccoli la viscosità, che finora era inesistente, si avvia e permette la trasformazione dell'energia cinetica in calore. Da questa descrizione Kolmogorov ha ricavato una espressione della densità di energia corrispondente a vortici di diametro dell'ordine di R , che è proporzionale a $R^{5/3}$. Questa legge di scala, che fa pensare ai fenomeni critici della termodinamica, è in buon accordo con gli esperimenti. Ma a cosa serve? Questi lavori non aiutano molto alla risoluzione dei problemi pratici, che debbono essere risolti numericamente. Per esempio la strada di vortici dietro un aereo o altro oggetto volante. E la formula menzionata prima per la resistenza dell'aria al moto...

ne ho cercato una dimostrazione nei libri di meccanica dei fluidi, di turbolenza, non ho trovato niente. Può darsi che esiste, perché quando c'è un argomento dimensionale è facile aggiustare qualche dimostrazione, ma per problemi più difficili non c'è nessun metodo generale. Forse avremo progressi nel futuro [10].

28. Un altro campo dove la meccanica statistica potrebbe avere applicazioni è la biologia. In modo generale, la fisica è adesso un attore importante nella biologia, perché l'osservazione ormai si fa alla scala della cellula. Alcuni esempi si possono trovare nel breve articolo di Ruppecht e Prost [11] e nella corrispondente bibliografia. A queste scale piccolissime le fluttuazioni sono importanti e la meccanica statistica può essere utile. Il moto browniano, essenziale nella vita della cella, può essere osservato a scala microscopica. Nel campo della biologia il numero degli attori (proteine per esempio) è gigantesco, ma c'è un elemento di semplicità: la turbolenza è esclusa. Infatti il moto diventa turbolento quando il numero di Reynolds $\mathcal{R}=\nu r/\eta$ è grande, e in biologia le velocità v e le distanze r sono piccole. Dalla biologia non aspettiamo necessariamente nuovi concetti di meccanica statistica, ma applicazioni dove la meccanica statistica potrà essere utile.

29. Per finire voglio suggerire che le idee della meccanica statistica potrebbero essere utili per l'epidemiologia. L'epidemiologia si può definire come lo studio della relazione fra una **causa** e un **effetto**:

Fumare	cancro
radiazione	cancro
Vino	cardiopatia

Si osserva per esempio una « coorte » di $N=10\,000$ persone che accettano di dire il numero x di sigarette che fumano ogni giorno, e ogni anno si nota il numero y di quelle che hanno un cancro del polmone. Se la curva $y(x)$ è crescente, si conclude che è meglio non fumare. Ora, la curva infatti è crescente al di là di un certo valore di x , ma per piccole dosi il valore di y è molto piccolo e quindi l'errore è grande. Non si può affermare se c'è un effetto reale. Mi chiedo se modelli matematici non potrebbero aiutare.

30. Penso al famoso lavoro di Volterra dove spiegava le oscillazioni della popolazione di pesci nel mare adriatico. La spiegazione era che i grossi pesci mangiano i piccoli, ma quando li hanno mangiati quasi tutti, muoiono di fame e i piccoli pesci possono proliferare, etc. Se chiamamo x il numero di pesci piccoli e y il numero di pesci grandi, abbiamo per esempio $dx/dt=ax-bxy$, dove a è la fecondità dei piccoli pesci e b l'appetito dei grandi pesci. In epidemiologia, potremmo scrivere una simile equazione nonlineare per la probabilità P di avere un cancro del faringe: $P=P_0+ax+by+cxy+dx^2+ey^2\dots$, dove x è il consumo di tabacco e y il consumo di alcol. Una tale descrizione risolverebbe il paradosso di certe statistiche secondo quali l'86 % delle morti sarebbero dovute all'alcol e il 76 % al tabacco, spiegando così il 162 % delle morti, ciò che ovviamente è troppo. La discussione delle piccole dosi richiede la conoscenza di a e b , che possono essere piccolissime rispetto a d e e , e possono forse essere ricavati da esperimenti di laboratorio.

Per quanto riguarda il vino, l'effetto di un consumo moderato è poco chiaro. Alcuni studi epidemiologici concludono ad un effetto benefico. Ciò che è certo è che se viene considerato soltanto l'effetto sulle malattie del cuore, e non sui cancro, l'effetto del vino è positivo. Al lettore auguro di goderne un consumo moderato.

APPENDICE. Galileo e la resistenza dell'aria.

Nella *prima giornata* della sua opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638), Galileo mette nella bocca di Salviati (generalmente considerato l'*alter ego* di Galileo) il seguente discorso (perfettamente giusto)

SALVIATI. ... Noi siamo su 'l volere investigare quello che accaderebbe a i mobili differentissimi di peso in un mezzo dove la resistenza sua fusse nulla, sì che tutta la differenza di velocità, che tra essi mobili si ritrovasse, referir si dovesse alla sola disuguaglianza di peso; parmi che ben potremo con molto probabil coniettura credere che nel vacuo sarebbero le velocità loro del tutto eguali.

Nella *quarta giornata*, Salviati torna alla resistenza dell'aria e il suo discorso diventa più dubbio:

SALVIATI. il mostrarci l'esperienza che due palle di grandezza eguali, ma di peso l'una 10 o 12 volte più grave dell'altra, quali sarebbero, per esempio, una di piombo e l'altra di rovere, scendendo dall'altezza di 150 o 200 braccia, con pochissimo differente velocità arrivano in terra, ci rende sicuri che l'impedimento e ritardamento dell'aria in amendue è poco.

Già nella prima giornata, è Sagredo che aveva affermato:

SAGR. Ma io, Sig. Simplicio, che n'ho fatto la prova, vi assicuro che una palla d'artiglieria, che pesi cento, dugento e anco più libbre, non anticiperà di un palmo solamente l'arrivo in terra della palla d'un moschetto, che ne pesi una mezza, venendo anco dall'altezza di dugento braccia.

Secondo le mie informazioni ricavate da Internet, duecento braccia sono circa 100 metri, due volte più alto della torre di Pisa. Non ho potuto trovare quanto è un palmo ma dovrebbe essere pochi centimetri.

La forza di resistenza al moto è $F_{turb} = k\pi R^2 \rho' v^2$, dove $\rho' = 1,16 \text{ kg/m}^3$ a 17°C e $k = 0,22$ è il valore

sperimentale trovato su Internet. La velocità massima è quindi $v_M = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{mg}{k\pi\rho'}} = \sqrt{\frac{4gR\rho}{3k\rho'}}$ oppure

$v_M = 226(R\rho/\rho_0)^{1/2}$, dove R è il raggio della sfera in metri e ρ_0 è la massa volumica dell'acqua. Per $R = 1 \text{ cm}$, la velocità massima è circa 20 m/s per una sfera di rovere ($\rho/\rho_0 = 0,6$ a $0,9$) e 76 m/s per una sfera di piombo ($\rho/\rho_0 = 11,3$). Ricordiamo che dopo una caduta dalla torre di Pisa la velocità all'arrivo sarebbe 33 m/s nel vuoto. La sfera di piombo sarà quindi poco rallentata, ma la sfera di rovere lo sarà molto. Pertanto, quando Salviati dice che "con pochissimo differente velocità arrivano in terra", sembra che non si ricordi bene degli esperimenti che, secondo il suo allievo Vincenzo Viviani, Galileo avrebbe fatto a Pisa.

Alcuni elementi di BIBLIOGRAFIA:

Principali documenti usati per preparare questa lezione:

[1] C. R. Physique **8**, Issues 5-6 (2007) *Work, dissipation and fluctuations in nonequilibrium physics* <http://www.sciencedirect.com/science/journal/16310705/8/5-6>. A cura di Bernard Derrida, Pierre Gaspard and Christian Van den Broeck Il lettore ci troverà articoli dei scienziati che hanno elaborato la teoria e riferimenti agli articoli originali di E.G.D. Cohen, D.J. Evans, G. Gallavotti, G.P. Morriss, C. Jarzynski, G.E. Crooks etc.

[2] Cours de Bernard Derrida au Collège de France
<https://www.college-de-france.fr/site/bernard-derrida/course-2016-02-29-09h30.htm>

[3] J. V. Koski e J. P. Pekola. *Maxwell's Demons Realized in Electronic Circuits*,] C. R. Physique **17**, Issue 10, p. 1130 (2016)

[4] Jacques Duran. *Sables émouvants* (Belin 2003)

[5] Pimpinelli, A., Villain, J., *Physics of crystal growth*, Cambridge University Press (1998)

[6] Christophe, *L'idée fixe du savant Cosinus* (1893) http://aulas.pierre.free.fr/chr_cos_01.html

[7] Kazumasa A. Takeuchi¹, Masaki Sano¹, Tomohiro Sasamoto² & Herbert Spohn, *Growing interfaces uncover universal fluctuations behind scale invariance Scientific Reports* **1**, Article number: 34 (2011) <http://www.nature.com/articles/srep00034>

[8] C. R. Physique **16**, Issue 3, Pages 255-344 (2015) *Coarsening dynamics* A cura di Federico Corberi and Paolo Politi

[9] Marcel Lesieur *Turbulence in Fluids*, Springer (2008)

[10] J. Cardy, G. Falkovich e K. Gawędzki. *Non-equilibrium Statistical Mechanics and Turbulence* (London Mathematical Society Lecture Note Series 355)

[11] J.F. Rupprecht, J. Prost, *A fresh eye on nonequilibrium systems*, Science **352** (6285), 514-515 (2016)

Articoli di interesse storico:

Carnot (1824) <https://webusers.imj-prg.fr/~david.aubin/cours/Textes/Carnot-Reflexions1824.pdf>

Clausius (1855) http://www.deutschestextarchiv.de/book/view/clausius_waermetheorie_1856?p=19